10-10-16

• R μεταθετικός με μοναδιαίο στοιχείο

$\Sigma \subseteq R$

$$\langle \Sigma \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} r_i f_i \;\middle|\; r_i \in R,\ f_i \in \Sigma,\ s \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

$$= \{ r_1 f_1 + \dots + r_s f_s \mid r_i \in R,\ f_i \in \Sigma,\ s \in \mathbb{Z}^+ \}$$

Σ βάση του ιδεώδους

Αν $f \in \Sigma \Rightarrow 1 \cdot f \in \langle \Sigma \rangle$
Δηλαδή, κάθε στοιχείο της βάσης είναι στοιχείο του ιδεώδους

• $I = \langle I \rangle$: κάθε ιδεώδες έχει βάση

<u>Ορισμός</u>: Ένα ιδεώδες λέγεται πεπερασμένα παραγόμενο, αν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο Σ, τέτοιο ώστε $I = \langle \Sigma \rangle$

<u>π.χ.</u>

$K[x_1, \dots, x_n, \dots]$ (πολυωνυμικός δακτύλιος με άπειρες μεταβλητές)

$I = \langle x_1, \dots, x_n, \dots \rangle$. Αυτό το ιδεώδες δεν είναι πεπερασμένο παραγόμενο. Δηλαδή, περιέχει όλα τα πολυώνυμα του K που έχουν σταθερό όρο μηδέν.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $I_1 = \langle \Sigma_1 \rangle$ και I_2 ιδεώδη.
$I_1 \subset I_2$ <u>ανν</u> $\Sigma_1 \subset I_2$

<u>Απόδειξη</u>

($\Rightarrow$) Έστω $I_1 \subset I_2 \Rightarrow \langle \Sigma_1 \rangle \subset I_2 \Rightarrow \Sigma_1 \subset \langle \Sigma_1 \rangle \subset I_2$
$\Rightarrow \Sigma_1 \subset I_2$

($\Leftarrow$) $\Sigma_1 \subset I_2$. Έστω $a \in I_1 = \langle \Sigma_1 \rangle \Rightarrow a = r_1 f_1 + \dots + r_s f_s$, f_s άρα $f_1, \dots, f_s \in I_2 \Rightarrow r_j f_j \in I_2 \Rightarrow a \in I_2$. Οπότε $I_1 \subset I_2$

Πρόταση: Έστω $I_1 = \langle \Sigma_1 \rangle$ και $I_2 = \langle \Sigma_2 \rangle$. Τότε $I_1 = I_2$ ανν $\Sigma_1 \subset I_2$ και $\Sigma_2 \subset I_1$

• $I + J = \{ f+g \mid f \in I,\ g \in J \}$, I, J: ιδεώδη

Πρόταση: Έστω $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ και $J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$.
Τότε $I + J = \langle f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_t \rangle$

Απόδειξη

$(\supseteq)$:
$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \overset{\in I}{f_1} + \overset{\in J}{0} \\ &\vdots \\ f_s &= \overset{\in I}{f_s} + \overset{\in J}{0} \\ g_1 &= \overset{\in I}{0} + \overset{\in J}{g_1} \\ &\vdots \\ g_t &= \overset{\in I}{0} + \overset{\in J}{g_t} \end{aligned}\right\} \in I+J$$

Οπότε $\{f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t\} \subset I+J$
$\Rightarrow \langle f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t \rangle \subset I+J$

$(\subseteq)$: Έστω $a \in I+J \Rightarrow a = f+g$, $f \in I$, $g \in J \Rightarrow$
$f = r_1 f_1 + r_2 f_2 + \dots + r_s f_s$
$g = r_1' g_1 + r_2' g_2 + \dots + r_t' g_t$

Οπότε, $a = f+g = r_1 f_1 + \dots + r_s f_s + r_1' g_1 + \dots + r_t' g_t \in \langle f_1, \dots, f_s, g_1, \dots, g_t \rangle$

• $I \cdot J = \{ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m \mid a_i \in I,\ b_i \in J$ και $m \in \mathbb{Z}^+ \}$

Πρόταση: Έστω $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ και $J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle$, τότε
$I \cdot J = \langle f_1 g_1, f_1 g_2, \dots, f_1 g_t, f_2 g_1, \dots, f_2 g_t, \dots, f_s g_1, \dots, f_s g_t \rangle$

Απόδειξη

$(\subseteq)$: Έστω $a_1 b_1 + \dots + a_m b_m \in I \cdot J$. Παίρνω το τυχαίο στοιχείο $a_i b_i$

$\subset$: υποσύνολο
$\subsetneq$: γνήσιο υποσύνολο

$a_i \in I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \Rightarrow a_i = r_1 f_1 + \dots + r_s f_s$
$b_i \in J = \langle g_1, \dots, g_t \rangle \Rightarrow b_i = r'_1 g_1 + \dots + r'_t g_t$

$a_i b_i = (r_1 f_1 + \dots + r_s f_s)(r'_1 g_1 + \dots + r'_t g_t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} r_i r'_j f_i g_j}_{\in \langle f_1 g_1, \dots, f_s g_t \rangle}$

Οπότε,
$\underset{\in \langle f_1 g_1, \dots, f_s g_t \rangle}{a_1 b_1} + \dots + \underset{\in \langle f_1 g_1, \dots, f_s g_t \rangle}{a_i b_i} + \dots + a_m b_m \Longrightarrow$

$\Rightarrow IJ \subset \langle f_1 g_1, \dots, f_s g_t \rangle$

$(\supseteq)$: $f_i g_j = \underset{\in I}{f_i} \underset{\in J}{g_j} \in IJ \Rightarrow \langle f_1 g_1, \dots, f_s g_t \rangle \subset IJ$

- I, J, $I \cup J$: ΔΕΝ είναι ιδεώδες
  $I \cap J$: ΠΑΝΤΑ ιδεώδες

<u>Ισχύουν</u>: $IJ \subset I \cap J$
$I \cup J \subset I + J$

<u>Δυνάμεις Ιδεωδών</u>
$I^1 = I$, $I^0 = \langle 1 \rangle = R$
$I^2 = I \cdot I$
$I^3 = I \cdot I^2$
$\vdots$
$I^n = I \cdot I^{n-1}$

Ριζικό Ιδεώδους I

$\sqrt{I} = \{ f \mid f \in R$ και $f^m \in I$, για κάποιο $m \in \mathbb{Z}^+ \}$

Θ.δ.ό $\sqrt{I}$ ιδεώδες.

i) $0 \in R,\ 0^1 \in I \Rightarrow 0 \in \sqrt{I}$

ii) $a, b \in \sqrt{I} \Rightarrow a^m \in I,\ b^n \in I$

$(a+b)^{m+n} = a^{m+n} + \binom{m+n}{1} a^{m+n-1} b + \dots + \binom{m+n}{i} a^{m+n-i} b^i = \sum \binom{m+n}{i} a^{m+n-i} \cdot b^i =$

$= a^{m+n} + \binom{m+n}{1} a^{m+n-1} b + \dots + \binom{m+n}{n} a^m b^n + \binom{m+n}{n+1} a^{m-1} b^{n+1} + \dots + \binom{m+n}{m+n} b^{m+n} \in I$

$\Rightarrow a+b \in \sqrt{I}$

iii) $r \in R,\ a \in \sqrt{I} \Rightarrow a^m \in I \Rightarrow \underset{\in R}{r^m}\ \underset{\in I}{a^m} \underset{\text{μεταθετικός}}{\overset{R}{\Rightarrow}} (ra)^m \in I \Rightarrow ra \in \sqrt{I}$

π.χ| στο $\mathbb{Z}$ (όλα τα ιδεώδη είναι κύρια, επίσης άπειρα)

$\sqrt{\langle 2 \rangle} = \langle 2 \rangle$

$\sqrt{\langle 4 \rangle} = \langle 2 \rangle$

$\sqrt{\langle 8 \rangle} = \langle 2 \rangle$

$\vdots$

$\sqrt{200} = \langle 10 \rangle$

Γενικά: $\sqrt{\langle p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_s^{a_s} \rangle} = \langle p_1 p_2 \dots p_s \rangle$

Ορισμός: $I : J = \{ a \in R \,/\, aJ \subset I \}$

Ορισμός: Ένας δακτύλιος R (μεταθετικός με 1) λέγεται δακτύλιος της Noether αν κάθε ιδεώδες I του R είναι πεπερασμένα παραγόμενο, δηλαδή υπάρχουν $f_1, \dots, f_s$ τέτοια ώστε $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$

<u>π.χ)</u> • Κάθε σώμα είναι δακτύλιος της Noether.

<u>Απόδειξη</u>

F σώμα $\Rightarrow$ έχει μόνο δυο Ιδεώδη: $F = \langle 1 \rangle$, $\{0\} = \langle 0 \rangle$

• Το $\mathbb{Z}$ είναι δακτύλιος της Noether.

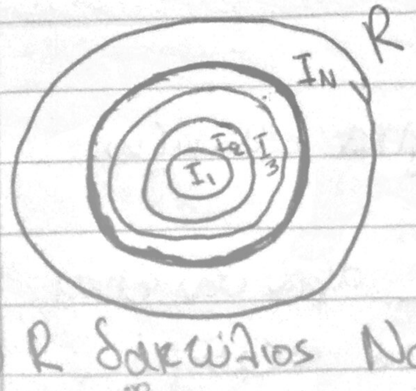
<u>Απόδειξη</u>

Στο $\mathbb{Z}$ κάθε Ιδεώδης είναι κύριο, δηλαδή έχει βάση που αποτελείται μόνο απ' ένα στοιχείο, άρα πεπερασμένη.

• Κάθε πεπερασμένος δακτύλιος είναι δακτύλιος της Noether.

<u>Θεώρημα</u>: Ένας δακτύλιος (πάντα εδώ μεταθετικός με 1) R είναι δακτύλιος της Noether <u>ανν</u> κάθε αύξουσα ακολουθία Ιδεωδών είναι τελικά σταθερή, δηλαδή για κάθε ακολουθία $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \dots$ υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε $I_N = I_{N+1} = \dots = I_{N+k} = \dots$

<u>Απόδειξη</u>



$\Rightarrow$ R δακτύλιος Noether, $I_1 \subset I_2 \dots \subset I_n \subset \dots$

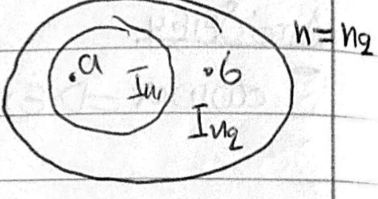
Θ.δ.ο $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ είναι Ιδεώδες

• $0 \in I_1 \Rightarrow 0 \in I_1 \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = I$

• $a,b \in I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow a\in I_{n_1},\ b\in I_{n_2}$

$n=\max\{n_1,n_2\}$, τότε $a\in I_{n_1}, b\in I_n \xrightarrow[I_{n_2}\subseteq I_n]{I_{n_1}\subseteq I_n} a,b\in I_n \Rightarrow a-b\in I_n$

$\Rightarrow a-b\in I$



• Έστω $a\in I,\ r\in R \Rightarrow a\in I_n$, για κάποιο $n \Rightarrow ra\in I_n\subset I \Rightarrow ra\in I$

Έστω I ιδεώδες $\xrightarrow[\text{Noether}]{R\ \text{δακτ.}}$ I πεπερασμένα παραγόμενο

$$\left.\begin{array}{l} I=\langle f_1,\dots,f_s\rangle,\ f_1\in I=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow f_1\in I_{n_1}\subseteq I_N \\ \vdots \\ f_s\in I=\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \Rightarrow f_s\in I_{n_s}\subseteq I_N \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\langle f_1,\dots,f_s\rangle}_{=I}\subseteq I_N$$

$N=\max\{n_1,n_2,\dots,n_s\}$

Άρα: $I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\dots\subseteq I_N\subseteq I_{N+1}\subseteq\dots\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i=I\subseteq I_N \Rightarrow$

$I_N=I_{N+1}=\dots=I_{N+k}$

($\Leftarrow$) Έστω J ιδεώδες του R. Ισχυρίζομαι ότι J πεπερασμένα παραγόμενο. Έστω ότι J δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενο. Έστω $a\in J$. Θέτω $I_1=\langle a_1\rangle \Rightarrow \langle a_1\rangle\subsetneq J \Rightarrow$

$\exists a_2\in J,\ a_2\notin I_1=\langle a_1\rangle$

$I_2=\langle a_1,a_2\rangle\subsetneq J$

Συνεχίζω: $a_3\in J \wedge a_3\notin\langle a_1,a_2\rangle$. Επαγωγικά συνεχίζω

$I_1\subsetneq I_2\subsetneq I_3\subsetneq\dots\subsetneq I_n\subsetneq I_{n+1}$. <u>Άτοπο!</u>, αφού δεν είναι τελικά σταθερή.

Άρα, J πεπερασμένα παραγόμενο

<u>Θεώρημα του Hilbert</u>: Αν ο δακτύλιος R είναι δακτύλιος της Noether, τότε και ο δακτύλιος $R[x]$ είναι δακτύλιος της Noether.

• K σώμα $\Rightarrow$ δακτύλιος της Noether $\Rightarrow$
Οπότε, $K[x_1]$ είναι δακτύλιος της Noether $\Rightarrow$
$(K[x_1])[x_2] = K[x_1, x_2]$ είναι δακτύλιος της Noether $\Rightarrow$
$(K[x_1, x_2])[x_3] = K[x_1, x_2, x_3]$ είναι δακτύλιος της Noether.
Συνεχίζοντας επαγωγικά:
$K[x_1, \dots, x_n]$ είναι δακτύλιος της Noether.